WIADOMOŚCI Z NAUK.

O PEWNYM WZORZE NA BRYŁOWATOŚĆ GRANIASTOSŁUPA ŚCIĘTEGO, PODANYM PRZEZ P. PROFESSORA GRUNERT ZA NOWY.

Gdy z wiérzchołków wielokąta, za jego płaszczyzną i po jednéjże jéj stronie, powyprowadzamy linie względem siebie równoległe, aż do spotkania się z płaszczyzną względem tamtéj nierównoległą, i punkta spotkania się połączymy z sobą, w tym samym porządku, liniami prostemi, powstanie ztąd bryła, zwana graniastosłupem ściętym; a nietylko ów wielokąt, ale i wielokąt o téj saméj liczbie boków, z połączenia punktów spotkania się powstały, nazywać tu będziemy podstawami téj bryły, przyjmując w ogólności, że żadna z dwóch podstaw nie jest do równoległych krawędzi bocznych prostopadłą. Wiadomo, że bryłowatość (objętość) O, takiego graniastosłupa, między innemi sposobami, otrzymuje się, mnożąc długość S, linii łączącéj z sobą środki ciężkości dwóch jego podstaw, przez powiérzchnią P, tego przecięcia, które w nim wydaje płaszczyzna, do równoległych krawędzi bocznych prostopadła; albo téż mnożąc ową długość S, przez powiérzchnią P', którejkolwiek z dwóch podstaw, i przez dostawę kąta i', pod którym ta podstawa jest nachylona do płaszczyzny, względem równoległych krawędzi bocznych prostopadłéj; tak, iż

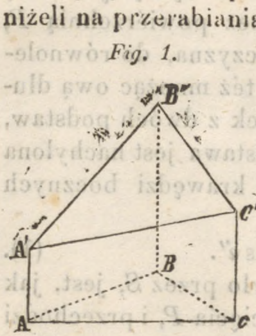
$$O=SP, \quad \text{lub też} \quad O=SP' \operatorname{dos} i'. \qquad (1).$$

(Linia prosta, któréj się tu długość oznaczyło przez S, jest, jak wiadomo, prostopadła do płaszczyzny przecięcia P, i przechodzi przez środek ciężkości tegoż przecięcia). Oczywista, że drugiego z dwóch wzorów (1) używa się wtenczas, gdy łatwiéj miéć powiérzchnią P' i kąt i', niż powiérzchnią P. Jeżeli kąt i' nie

był wymierzony wprost, ale trzeba go dochodzić na drodze rachunkowéj, mając potemu dane w liczbach, wszystkie trzy boki jakowego trójkąta, mającego swe wiérzchołki w trzech punktach podstawy P', i mając oraz dane odległości tych trzech wiérzchołków od płaszczyzny, do równoległych krawędzi bocznych prostopadłéj; wtedy, chcąc miéć przed sobą wyrażenia do obrachunku za pomocą logarytmów łatwe, szuka się najprzód pewnych ilości posiłkowych, a z nich dopiéro kąta i'. Można atoli dostawę tegoż kąta i', wyrazić bezposrednio przez owe linie, w liczbie sześciu dane; i gdy to wyrażenie wprowadzimy zamiast dos i', do drugiego z dwóch powyższych iloczynów, dających O, będziemy mieli właśnie formułę, o któréj wyprowadzeniu p. professor Grunert, w wydawaném przez siebie *Archiv der Mathematik und Physik (Dreissigster Theil,* 1858, str. 453—465), napisał artykuł pod tytułem: „Nowy a uwagi godny wzór na bryłowatość graniastosłupów ściętych, ze szczególnym względem na ważne zastosowania, jakie tenże wzór w obliczaniu nasypów i wykopów przy budowie kolei żelaznych, zakładaniu sztucznych łąk i przy wszystkich robotach niwellacyjnych miéć może".

Chociaż trudno byłoby twierdzić, że opisany dopiéro wzór jest zupełnie nowym, musi on jednak być mało znanym. Sądziło się przeto, że nie od rzeczy będzie tu wykazać, jak wspomnione wyrażenie na dostawę kąta i' można wyprowadzić: 1) ze znanego dobrze wyrażenia na sty i', do którego, zamiast boków trójkąta na płaszczyznie podstawy P', wchodzą rzuty tychże boków, na płaszczyznie przecięcia P; 2) sposobem, od jedynego wywodu podanego przez autora, mało oddmiennym, ale może łatwiejszym; 3) sposobem, więcéj na geometryi elementarnéj, niżeli na przerabianiach algebraicznych, opartym.

Fig. 1.



Z wiérzchołków A', B', C' *(fig. 1)*, jakiegokolwiek trójkąta na płaszczyznie podstawy P', są do płaszczyzny przecięcia P, pospuszczane linie prostopadłe, spotykające tę drugą płaszczyznę odpowiednio w punktach A, B, C. Mamy dane wszystkie trzy boki trójkąta $A'B'C'$, tudzież dane wyniesienia AA', BB', CC', trzech jego wiérzchołków nad płaszczyznę ABC, a trzeba przez te sześć rzeczy danych wyrazić dostawę kąta i', zawartego między płaszczyznami $A'B'C'$ i ABC.

Dla skrócenia, oznaczmy powiérzchnie trójkątów ABC i $A'B'C'$, odpowiednio przez $\triangle$ i $\triangle'$, i połóżmy

$$BC=\alpha,\quad CA=\beta,\quad AB=\gamma;$$
$$AA'=a,\quad BB'=b,\quad CC'=c;$$
$$B'C'=a',\quad C'A'=b',\quad A'B'=c'.$$

Według znanego dobrze wzoru na styczną kąta, jaki z poziomem czyni płaszczyzna przechodząca przez trzy punkta dane (*), jest

$$\text{sty } i'=\frac{\sqrt{\alpha^2(a-b)(a-c)+\beta^2(b-a)(b-c)+\gamma^2(c-a)(c-b)}}{2\triangle},$$

czyli

$$\text{sty } i'=\frac{\sqrt{-\{\alpha^2(a-b)(c-a)+\beta^2(b-c)(a-b)+\gamma^2(c-a)(b-c)\}}}{2\triangle}. \quad (2)$$

A że w trapezach BC', AC', AB', jako u spodu prostokątnych, zachodzą związki

$$\alpha^2=a'^2-(b-c)^2,\quad \beta^2=b'^2-(c-a)^2,\quad \gamma^2=c'^2-(a-b)^2, \quad (3)$$

które, na mocy tosamości

$$(a-b)(c-a)(b-c)(b-c+c-a+a-b)=\text{o},$$

czyli

$$(b-c)^2(a-b)(c-a)+(c-a)^2(b-c)(a-b)+(a-b)^2(c-a)(b-c)=\text{o}, \quad (4)$$

dają

$$\left.\begin{aligned}&\alpha^2(a-b)(c-a)+\beta^2(b-c)(a-b)+\gamma^2(c-a)(b-c)\\ &=a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c),\end{aligned}\right\} \quad (5)$$

i wiadomo, że

$$\triangle=\triangle' \text{ dos } i'; \quad (6)$$

w miejsce zatém wzoru (2), można napisać

$$\text{wst } i'=\frac{\sqrt{-\{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)\}}}{2\triangle'}, \quad (7)$$

a tém samém,

$$\text{dos } i'=\sqrt{1+\frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\triangle'^2}}; \quad (8)$$

i pozostaje już tylko, zamiast $\triangle'^2$, położyć drugą stronę wiadomego równania

$$\triangle'^2=s'(s'-a')(s'-b')(s'-c')$$

(*) *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géometrie; par* G. Lamé. *Paris*, 1818, str. 101—104. *Recueil de diverses propositions, résolues ou démontrées par l'analyse algébrique; par* L. Puissant. *Troisième édition. Paris*, 1824, str. 259.

(gdzie $2s' = a' + b' + c'$), aby na dos i', mieć wyrażenie żądane. Zważając zresztą, że związek (6) daje $\Delta'^2 - \Delta^2 = \Delta'^2 \operatorname{wst}^2 i'$, i zapatrując się przytém na równanie (7), postrzeżemy, iż $1/4$ każdéj strony równania (5) wyraża różnicę $\Delta^2 - \Delta'^2$.

Jeżeli teraz, w drugim z dwóch wzorów (1), zamiast dos i', położymy drugą stronę równania (8), będziemy mieli wzór

$$O = SP' \sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}}, \quad (9)$$

najogólniejszy z tych wzorów, które autor na bryłowatość graniastosłupów ściętych podaje.

Dla graniastosłupa ściętego, któregoby jedną z dwóch podstaw był trójkąt $A'B'C'$, a przecięciem prostopadłém do równoległych krawędzi bocznych $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, był trójkąt ABC, mielibyśmy

$$S = \frac{\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}}{3}, \quad P = \Delta, \quad P' = \Delta';$$

przez co pierwszy z dwóch wzorów (1) zamieniłby się na twierdzenie, z geometryi elementarnéj znane, a wzór (9) przybrałby postać, któréj tu wypisywać nie masz potrzeby. Dla graniastosłupa prostego $ABCA'B'C'$, mającego za właściwą podstawę trójkąt ABC, a ściętego płaszczyzną $A'B'C'$, byłoby podobnież

$$S = \frac{a + b + c}{3}, \quad P = \Delta, \quad P' = \Delta'.$$

2) Łatwo sprawdzić, że jakiemikolwiek ilościami byłyby a, b i c, jest zawsze

$$-(b-c)^2 - (c-a)^2 + (a-b)^2 = 2(c-a)(b-c).$$

Na mocy tosamości dopiéro napisanéj, równania (3) dają

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = a'^2 + b'^2 - c'^2 + 2(c-a)(b-c);$$

a że, jak wiadomo,

$$4\Delta^2 = \alpha^2\beta^2 - \tfrac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2;$$

na mocy zatém dwóch piérwszych z pomiędzy równań (3), tudzież na mocy równania dopiéro wyprowadzonego, będzie

$$4\Delta^2 = \{a'^2 - (b-c)^2\}\{b'^2 - (c-a)^2\}$$
$$- \tfrac{1}{4}\{(a'^2 + b'^2 - c'^2) + 2(c-a)(b-c)\}^2,$$

czyli, po rozwinieniu częściowém i redukcyi,

$$4\Delta^2 = a'^2 b'^2 - \tfrac{1}{4}(a'^2 + b'^2 - c'^2)^2$$
$$- a'^2(c-a)^2 - b'^2(b-c)^2 - (a'^2 + b'^2 - c'^2)(c-a)(b-c).$$

Po drugiéj stronie niniejszego równania, wielomian wyższy wyraża $4\Delta'^2$, wielomian zaś niższy wychodzi na

$$a'^2(c-a)(a-c+c-b) + b'^2(b-c)(c-b+a-c) + c'^2(c-a)(b-c),$$

czyli na

$$a'^2(a-b)(c-a) + b'^2(b-c)(a-b) + c'^2(c-a)(b-c);$$

wspomnione więc równanie daje

$$\Delta^2 = \Delta'^2 + \frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4},$$

a tém samém

$$\Delta = \Delta' \sqrt{1 + \frac{a'^2(a-b)(c-a)+b'^2(b-c)(a-b)+c'^2(c-a)(b-c)}{4\Delta'^2}}. \quad (10)$$

Za pomocą tego wyrażenia dla Δ, można już z pierwszego z dwóch wzorów (1), przejść bezpośrednio do wzoru (9), gdy O ma wyrażać bryłowatość graniastosłupa ściętego trójkątnego; w każdym zaś razie, łącząc równanie (10) z równaniem (6), otrzymamy na nowo wzór (8).

Dowiódlszy, jak dopiéro, związku napisanego tu bezpośrednio przed równaniem (10), dosyć będzie oprzéć się jeszcze na równaniu (5), tudzież na wzorze

$$\operatorname{sty} i' = \frac{\sqrt{\Delta'^2 - \Delta^2}}{\Delta},$$

wypływającym ze związku (6), aby otrzymać wzór (2), który w obu miejscach powyżéj przytoczonych, jest tylko za pomocą geometryi analitycznéj wyprowadzony. (*)

3) Gdybyśmy szczególny przynajmniéj przypadek ogólnego wzoru (9), ściągający się do ściętego graniastosłupa trój-

(*) P. prof. Grunert przychodzi do równania (10), jak następuje We wzorze

$$16\Delta^2 = 2\alpha^2\beta^2 + 2\beta^2\gamma^2 + 2\gamma^2\alpha^2 - \alpha^4 - \beta^4 - \gamma^4$$

podstawia za α^2, β^2, γ^2, drugie strony równań (3), i mówi, że wypływające ztąd równanie

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 = {} & 2\{a'^2-(b-c)^2\}\{b'^2-(c-a)^2\} \\ & + 2\{b'^2-(c-a)^2\}\{c'^2-(a-b)^2\} \\ & + 2\{c'^2-(a-b)^2\}\{a'^2-(b-c)^2\} \\ & - \{a'^2-(b-c)^2\}^2 - \{b'^2-(c-a)^2\}^2 - \{c'^2+(a-b)^2\}^2 \end{aligned}$$

daje się, po przynależném rozwinieniu częściowém drugiéj strony, napisać w postaci:

$$\begin{aligned} 16\Delta^2 = {} & 2a'^2b'^2 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4 \\ & - 2(a-b)^2(a'^2+b'^2-c'^2) \\ & - 2(b-c)^2(b'^2+c'^2-a'^2) \\ & - 2(c-a)^2(c'^2+a'^2-b'^2) \\ & + 2(a-b)^2(b-c)^2 + 2(b-c)^2(c-a)^2 + 2(c-a)^2(a-b)^2 \\ & - (a-b)^4 - (b-c)^4 - (c-a)^4. \end{aligned}$$

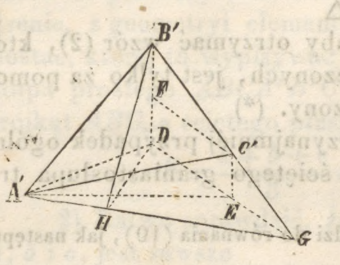
Powiada daléj, że łatwo sprawdzić następujący ogólny, przez się też na uwagę zasługujący związek algebraiczny:

$$\left.\begin{aligned} 2(a-b)^2(b-c)^2 + 2(b-c)^2(c-a)^2 + 2(c-a)^2(a-b)^2 \\ -(a-b)^4-(b-c)^4-(c-a)^4 \end{aligned}\right\} = 0,$$

kątnego a prostego. $ABCA'B'C'$, jak sobie tego życzy autor, chcieli mieć wprowadzonym do elementarnego wykładu stereometryi; sądzę, że oba wywody wzoru (10) dopiéro podane, byłyby wtedy wywodami zbyt algebraicznemi, dla uczniów przytrudnemi. Obaczmy więc jeszcze, jakby, chociaż mniéj ogólnie, można wyprowadzić wzór (10), idąc poprostu za jednêm z tych wykréśleń, za pomocą których zwykło się dowodzić związku (6).

Przez najniższy A' (*fig. 1*) ze trzech wiérzchołków trójkąta $A'B'C'$, poprowadźmy płaszczyznę równoległą do płaszczyzny ABC, i niech tak poprowadzona płaszczyzna przecina się z liniami BB', CC', odpowiednio w punktach D, E, a têm samém, z graniastosłupem $ABCA'B'C'$, podług trójkąta $A'DE$, równego trójkątowi ABC. Odciętą tym sposobem od graniastosłupa $ABCA'B'C'$, część górną, ostrosłup czworokątny $B'C'EDA'$, niech wystawia *fig. 2*. Zachowując oznaczenia powyższe, będzie

Fig. 2.



powiérzchnia trójkąta $A'DE = \triangle$, $B'D = b - a$, $C'E = c - a$; a gdy z punktu C' wyprowadzimy linią względem ED równoległą, aż do przecięcia się z DB' w punkcie F, będzie $B'F = b - c$, w założeniu, że punkt B' jest nad płaszczyznę $A'DE$ bardziéj wyniesiony, niżeli punkt C'. W têm założeniu, linie

i wypisuje wzór, do którego się poprzedzające wyrażenie dla $16\triangle^2$, na mocy niniejszego związku sprowadza. Mówi następnie, że tak wypisany wzór, z przyczyny

$$16\triangle'^2 = 2a'^2b'^2 + 2b'^2c'^2 + 2c'^2a'^2 - a'^4 - b'^4 - c'^4,$$

przechodzi na

$$\begin{aligned}16\triangle^2 = 16\triangle'^2 &- 2(a-b)^2(a'^2 + b'^2 - c'^2)\\ &- 2(b-c)^2(b'^2 + c'^2 - a'^2)\\ &- 2(c-a)^2(c'^2 + a'^2 - b'^2),\end{aligned}$$

czyli na

$$\begin{aligned}16\triangle^2 = 16\triangle'^2 &- 2a'^2\{\ (a-b)^2 - (b-c)^2 + (c-a)^2\}\\ &- 2b'^2\{\ (a-b)^2 + (b-c)^2 - (c-a)^2\}\\ &- 2c'^2\{-(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}.\end{aligned}$$

Uważając nareszcie, że ilości w teraźniejszych nawiasach $\{\ \}$, są odpowiednio równe ilościom

$$-2(a-b)(c-a),\ -2(b-c)(a-b),\ -2(c-a)(b-c),$$

otrzymuje związek

$$16\triangle^2 = 16\triangle'^2 + 4a'^2(a-b)(c-a) + 4b'^2(b-c)(a-b) + 4c'^2(c-a)(b-c),$$

a ztąd równanie (10).

$B'C'$ i DE, przedłużone, przetną się z sobą w punkcie G; i na mocy równokątności trójkątów $B'DG$, $C'EG$ i $B'FC'$ względem siebie, będzie

$$B'G : B'D = C'G : C'E = B'C' : B'F,$$

czyli

$$\frac{B'G}{b-a} = \frac{C'G}{c-a} = \frac{a'}{b-c}. \qquad (11)$$

Płaszczyzny $A'B'C'$ i $A'DE$, czyli płaszczyzny $A'B'G$ i $A'DG$, przetną się z sobą w linii $A'G$; a że linia DB' jest prostopadła do płaszczyzny $A'DG$; gdy przeto z punktu D, spuścimy linią prostopadłą do linii $A'G$, i spodek H téj prostopadłéj złączymy z punktem B', linia $B'H$ będzie też, jak wiadomo, prostopadłą do $A'G$, a kąt $B'HD$, jako miara kąta dwuściennego $B'A'GD$, będzie $= i'$, bo płaszczyzny $A'DG$ i ABC są z wykreślenia równoległe. Dla skrócenia, oznaczmy jeszcze powiérzchnią trójkąta $A'B'G$, przez T', a powiérzchnią trójkąta $A'DG$, przez T. Ponieważ trójkąty $A'B'C'$ i $A'B'G$ mają wspólny wiérzchołek A', a podstawy na jednéj linii prostéj, i toż mówić o trójkątach $A'DE$ i $A'DG$; ma się przeto

$$\Delta' : T' = B'C' : B'G = B'F : B'D,$$
$$\Delta : T = DE : DG = B'F : B'D;$$

a tém samém (do tego wniosku nie są właściwie potrzebne powyższe stosunki trzecie), przy uwadze, że trójkąty $A'B'G$ i $A'DG$ mają wspólną podstawę $A'G$, a za wysokości $B'H$ i DH, ma się

$$\Delta' : \Delta = T' : T = B'H : DH.$$

Ztąd zaś i z własności $B'H^2 - DH^2 = B'D^2$ trójkąta prostokątnego $B'DH$, wypada

$$\Delta'^2 - \Delta^2 : \Delta'^2 = B'D^2 : B'H^2;$$

a że

$$\Delta'^2 : T'^2 = B'F^2 : B'D^2,$$
$$T'^2 : A'G^2 = B'H^2 : 4 \quad ;$$

składając zatém niniejsze trzy proporcye z sobą, przychodzimy do proporcyi

$$\Delta'^2 - \Delta^2 : A'G^2 = B'F^2 : 4,$$

Sposób przekonania się o prawdziwości powyższego równania pomiędzy a, b, c, mającego za drugą stronę zero, przez autora nie wymieniony, zależy zapewne na tém, że piérwsza strona rzeczonego równania rozkłada się na czynniki zupełnie tak samo, jak gdyby $a-b$, $b-c$, $c-a$, były trzema bokami trójkąta.

czyli, po wstawieniu jeszcze $b-c$ za $B'F$, do równania

$$\triangle'^2 - \triangle^2 = \frac{(b-c)^2 A'G^2}{4}.$$

Wiadomo, że gdy wiérzchołek A' jakiegokolwiek trójkąta $A'B'G$, z którymkolwiek punktem C' boku $B'G$, temu wiérzchołkowi przeciwległego, złączymy linią prostą $A'C'$, będzie zawsze

$$A'G^2 . B'C' + A'B'^2 . C'G - A'C'^2 . B'G = B'G . C'G . B'C'.$$

Podstawiając w tym ogólnym związku, za boki trójkąta $A'B'C'$, ich nazwania skrócone, a za linie $B'G$ i $C'G$, ich wartości z proporcyj (11), otrzymujemy równanie

$$A'G^2 . a' + \frac{c'^2 a'(c-a)}{b-c} - \frac{b'^2 a'(b-a)}{b-c} = \frac{a'^3(b-a)(c-a)}{(b-c)^2},$$

które, po odrzuceniu wspólnego czynnika a', rozmnożeniu obu stron przez $(b-c)^2$, tudzież po przeniesieniu drugiego i trzeciego wyrazu ze strony piérwszéj na drugą, przechodzi na

$$(b-c)^2 A'G^2 = a'^2(a-b)(a-c) + b'^2(b-a)(b-c) + c'^2(c-a)(c-b).$$

A tak, gdy w powyższém równaniu dla $\triangle'^2 - \triangle^2$, zamiast licznika drugiéj strony, położymy jego wartość dopiéro znalezioną, będziemy mieli wzór

$$\triangle'^2 - \triangle^2 = \frac{a'^2(a-b)(a-c) + b'^2(b-a)(b-c) + c'^2(c-a)(c-b)}{4},$$

z którego już łatwo przejść do równania (10).

W przypadku $b = c$, czyli dla punktów B' i C' jednako nad płaszczyznę $A'DE$ wyniesionych, linie $B'C'$, DE i $A'G$ przechodzą na równoległe; wysokość przeto trójkąta $A'B'C'$, biorąc w nim za podstawę $B'C'$, będzie teraz równa linii $B'H$; a wysokość trójkąta $A'DE$, biorąc w nim za podstawę DE, będzie równa linii DH. A że teraz jest nadto $DE = B'C'$; mnożąc zatém równość $B'H^2 - DH^2 = B'D^2$ przez $\frac{1}{4}\, B'C'^2$, wypada

$$\triangle'^2 - \triangle^2 = \frac{B'C'^2 . B'D^2}{4} = \frac{a'^2(b-a)^2}{4}:$$

co pokazuje, że wzór poprzedzający jest jeszcze i w teraźniejszym przypadku prawdziwy.

Ponieważ w proporcyach (11), zamiast $B'G$, $C'G$ i a', można położyć odpowiednio DG, EG i α; a trójkąt $A'DG$, przecięty poprzeczną $A'E$, daje podobnież

$$A'G^2 . DE + A'D^2 . EG - A'E^2 . DG = DG . EG . DE;$$

w powyższém przeto wyrażeniu na $(b-c)^2 A'G^2$, a tém samém i w wypadającém z niego wyrażeniu na $\triangle'^2 - \triangle^2$, można, zamiast a', b' i c', napisać odpowiednio α, β i γ.

Dowiódłszy, jak teraz, że Δ', Δ, $\sqrt{\Delta'^2-\Delta^2}$, są proporcyonalne bokom $B'H$, DH, $B'D$, trójkąta $B'DH$, dosyć będzie znać jeszcze same tylko nazwiska trygonometryczne stosunków między wspomnionemi dopiéro bokami, aby mieć równania

$$\text{wst}\, i' = \frac{\sqrt{\Delta'^2-\Delta^2}}{\Delta'},\ \text{dos}\, i' = \frac{\Delta}{\Delta'} = \sqrt{1-\frac{\Delta'^2-\Delta^2}{\Delta'^2}},$$

$$\text{sty}\, i' = \frac{\sqrt{\Delta'^2-\Delta^2}}{\Delta},$$

a z tych równań, za pomocą znalezionych tu wyrażeń na $\Delta'^2-\Delta^2$, przejść do wzorów (7), (8) i (2). (*)

Uważmy tu, że drugie strony równań (3) dają się rozłożyć, każda na dwa czynniki, i że zatém, za pomocą tych równań, nie trudno jest, przy użyciu logarytmów, z wiadomych a', b', c',

(*) W dziele: *Poziomowanie topograficzne. Warszawa*, 1851, autor, p. A. Gerschow, mówiąc o wynajdowaniu spadku płaszczyzny przechodzącéj przez trzy punkta dane (str. 256 — 258), wykazuje przed innemi (których tu nie mamy potrzeby przytaczać) wzorami, że gdy będą dane znamiona a, b, c, punktów A', B', C', tudzież dane dwa boki α, γ i kąt między niemi zawarty (α,γ) trójkąta $A'DE$; natenczas powiérzchnia T i podstawa $A'G$ trójkąta $A'DG$, znajdą się z równań

$$T = \tfrac{1}{2}\,\frac{\alpha\,(b-a)}{b-c}\,\gamma\ \text{wst}\,(\alpha,\gamma),$$

$$A'G^2 = \frac{\alpha^2(b-a)^2}{(b-c)^2} + \gamma^2 - \frac{2\,\alpha\,(b-a)}{b-c}\,\gamma\ \text{dos}\,(\alpha,\gamma),$$

a szukanym spadkiem płaszczyzny $A'B'C'$, będzie

$$\text{sty}\, i' = \frac{(b-a)A'G}{2T}.$$

Już zaś niniejsze wyrażenie spadku płaszczyzny $A'B'C'$, z przyczyny $\Delta = \frac{1}{2}\alpha\,\gamma\ \text{wst}\,(\alpha,\gamma)$, wychodzi oczywiście na

$$\text{sty}\, i' = \frac{\sqrt{\alpha^2(b-a)^2+\gamma^2(b-c)^2-2\,\alpha\,\gamma\,(b-a)(b-c)\ \text{dos}\,(\alpha,\gamma)}}{2\Delta},$$

a po wstawieniu za iloczyn 2 $\alpha\gamma$ dos (α,γ), jego wartości $\alpha^2+\gamma^2-\beta^2$, zamienia się na wzór (2). I łatwo też postrzedz samemu, że gdyby na wyznaczenie kąta i', były, prócz znamion a, b, c, dane jeszcze trzy boki, nie trójkąta $A'DE$, ale trójkąta $A'B'C'$; postępowanie dopiéro wskazanemu podobne doprowadziłoby nas do wzoru (7).

Jak się bryłowatość wykopu lub nasypu może z przybliżeniem, według różnych przypadków, obliczyć; wykłada to p. Gerschow obszernie i objaśnia przykładami.

a, b i c, obliczyć α, β i γ. W przypadkach, kiedy bezwzględne wartości różnic $b-c$, $c-a$, $a-b$, są, w stosunku do odpowiadających onym boków a', b', c', dostatecznie małe, przychodzi się bardzo łatwo do boków α, β, γ, za pomocą równań przybliżonych

$$a'-\alpha=\frac{(b-c)^2}{2a'},\quad b'-\beta=\frac{(c-a)^2}{2b'},\quad c'-\gamma=\frac{(a-b)^2}{2c'},$$

używając potemu tablicy, dającéj połowę trzeciéj ciągło proporcyonalnéj do dwóch liczb danych. Obliczywszy α, β i γ, można już znaleźć powiérzchnią trójkąta ABC (*fig. 1*), za pomocą wzoru

$$\triangle=\sqrt{\sigma(\sigma-\alpha)(\sigma-\beta)(\sigma-\gamma)}$$

(gdzie $2\,\sigma=\alpha+\beta+\gamma$), a następnie i bryłowatość graniastosłupa $ABCA'B'C'$, za pomocą piérwszego z dwóch wzorów (1). Pospolicie jednak staramy się mieć podstawę i wysokość trójkąta ABC, aby ztąd otrzymać najłatwiéj jego powiérzchnią $\triangle$.

Zdaniem p. prof. Grunert, na obliczanie bryłowatości wykopów i nasypów, zwłaszcza nieforemnych, nie masz, mówiąc w ogólności, innéj metody, tylko przystosowanie do nich wzoru, dającego bryłowatość ściętego graniastosłupa prostego o podstawie trójkątnéj. Przyczyny zaś, dla których formułę (9) uważa do tego użytku za właściwszą od piérwszego z dwóch wzorów (1), dają się streścić w słowach: że gdy np. graniastosłup trójkątny prosty a ścięty $ABCA'B'C'$, jest bryłą ziemi, od powiérzchni $A'B'C'$ gruntu aż do płaszczyzny poziomej a niedostępnéj ABC wykopać się mającą, i któréjto bryły trzeba objętość, przed wykopaniem, obliczyć; natenczas, przy wspólnéj potrzebie wyznaczenia znamion a, b, c, punktów A', B', C', za pomocą łaty niwellacyjnéj i narzędzia niwellacyjnego, wymierzenie wszystkich trzech boków trójkąta $A'B'C'$, leżącego na powiérzchni gruntu (lub też wymierzenie wszystkich trzech boków tegoż trójkąta $A'B'C'$, tudzież jednéj wysokości onego), i obliczenie potém drugiéj strony równania (9) (w założeniu $S=\frac{1}{3}(a+b+c)$, $P'=\triangle'$), zabiéra, według autora, mniéj czasu, i prowadzi do wypadku ściślejszego, niżeli wymierzenie poziomego rzutu boku np. $A'C'$, tudzież wymierzenie odległości linii $B'B$ od płaszczyzny pionowéj $A'C'CA$, i obliczenie potém drugiéj strony piérwszego z dwóch równań (1) (w założeniu $S=\frac{1}{3}(a+b+c)$, $P=\triangle$). Gdyby atoli dzielenie wykopu lub nasypu na takie graniastosłupy ścięte, z którychby każdy miał ściany boczne pionowe, część powiérz-

chni gruntu za jednę, a część powiérzchni projektu za drugą podstawę, i stosowanie do tych graniastosłupów, wzoru (9), stanowiło sposób obliczania bryłowatości wykopu lub nasypu w każdym razie najdogodniejszy; wzór (9) znajdowałby się oddawna w każdéj obszerniejszéj książce, obrachunku robot grabarskich nauczającéj. (*)

W czerwcu 1859. *A. F*ręczkiewicz

(*) W przypadku prostopadłości płaszczyzny $A'B'C'$ do płaszczyzny P, czyli w założeniu $i'=90°$, punkta A, B, C przypadałyby, wszystkie trzy, na jednéj linii prostéj; i byłyby a, b, c odległościami wiérzchołków A', B', C' od téjże linii, a $\triangle=o$. Oba dowody wzoru napisanego bezpośrednio przed równaniem (10), podane pod 2), zmieniłyby się tylko w tém, że w nich byłoby $\triangle=o$; dowód zaś pod 3), stałby się prostszym. W teraźniejszym więc przypadku, jak się to zresztą pokazuje i ze wzoru (7), otrzymalibyśmy równanie

$$a'^2(a-b)(a-c)+b'^2(b-a)(b-c)+c'^2(c-a)(c-b)=4\triangle'^2,$$

różniące się samą tylko prostszą postacią od równania

$$\begin{aligned}a'^2a^2+b'^2b^2+c'^2c^2 &-(a'^2+b'^2-c'^2)ab\\ &-(b'^2+c'^2-a'^2)bc\\ &-(c'^2+a'^2-b'^2)ca=4\triangle'^2,\end{aligned}$$

zadanego do udowodnienia w *Nouvelles Annales de Mathématiques. Mai* 1859. *Questions* str. 71, n° 478.